Prof. Dr. Alfred Toth

Kategorial-relationale Verschachtelung bei Arinschen Zeichenklassen

1. In Toth (2009) wurden kategoriale Verschachtelungen bei erweiterten Zeichenklassen untersucht, die folgende allgemeine Form haben

Zkl* = ((3.a b.c) (2.d e.f) (1.g h.i))

Unter einer Arinschen Zeichenklasse, eingeführt von Arin (1981, S. 220), versteht man komplex erweiterte Zeichenklassen der Form

Zkl** = (3.a (1.c 2.d 3.e) 2.f (1.g 2.h 3.i) 1.j (1.k 2.l 3.m))

Während also bei Zkl* jedes primäre Subzeichen der triadischen Hauptrelation durch ein sekundäres Subzeichen aus einem freien trichotomischen Bezug semiotisch determiniert wird, wird bei Zkl** jedes primäre Subzeichen durch eine vollständige Zeichenrelation semiotisch determiniert. Sowohl bei Zkl* als auch bei Zkl* sind die semiotischen Inklusionsordnungen zu bestimmen. Die minimalen Anzahlen von Zeichenklassen ergeben sich durch die jeweils stärksten Ordnungen, d.h.

bei Zkl*: $(a \leq c \leq d \leq f \leq g \leq i)$
bei Zkl** : $(a \leq c \leq d \leq e) \wedge (a \leq f \leq g \leq h \leq i) \wedge (a \leq j \leq k \leq l \leq m)$

2. Wenn wir von einer konkreten Arinschen Zeichenklassen ausgehen, z.B.

Zkl** = (3.1 (1.3 2.2 3.1) 2.1 (1.2 2.2 3.2) 1.3 (1.1 2.1 3.1)),

dann können wir sie mit Hilfe der semiotischen Kategorientheorie, welche auf verschachtelten Relationen (Bense 1979, S. 53, 67) definiert ist (vgl. Toth 2008, S. 159 ff.) wie folgt notieren

((3.1) (1.3)) ≡ $[[\alpha°\beta°, id3], [id1, \beta\alpha]]$
((3.1) (2.2)) ≡ $[[\beta°, \beta°], [\alpha, \alpha]]$
((3.1) (3.1)) ≡ $[[id3, \alpha°\beta°], [\beta\alpha, id1]]$

$((2.1)\ (1.2)) \equiv [[\alpha°, id2], [id1, \alpha]]$
$((2.1)\ (2.2)) \equiv [[id2, id2], [\alpha, \alpha]]$
$((2.1)\ (3.2)) \equiv [[\beta, id2], [\beta\alpha, \alpha]]$

$((1.3)\ (1.1)) \equiv [[id1, id1], [\alpha°\beta°, \alpha°\beta°]]$
$((1.3)\ (2.1)) \equiv [[\alpha, id1], [\beta°, \alpha°\beta°]]$
$((1.3)\ (3.1)) \equiv [[\beta\alpha, id1], [id3, \alpha°\beta°]]$

Nun können wir, dem Vorgehen in Toth (2009) entsprechend, die weiteren inneren Verschachtelungen vornehmen:

2. Stufe		3. Stufe
$[[\alpha°\beta°, id3], [id1, \beta\alpha]]$	$\rightarrow$	$[[\alpha°\beta°, id1], [\alpha°\beta°, \beta\alpha]], [[id3, id1], [id3, \beta\alpha]]$
$[[\beta°, \beta°], [\alpha, \alpha]]$	$\rightarrow$	$[[\beta°, \alpha], [\beta°, \alpha]], [[\beta°, \alpha], [\beta°, \alpha]]$
$[[id3, \alpha°\beta°], [\beta\alpha, id1]]$	$\rightarrow$	$[[id3, \beta\alpha], [id3, id1]], [[\alpha°\beta°, \beta\alpha], [\alpha°\beta°, id1]]$
$[[\alpha°, id2], [id1, \alpha]]$	$\rightarrow$	$[[\alpha°, id1], [\alpha°, \alpha]], [[id2, id1], [id2, \alpha]]$
$[[id2, id2], [\alpha, \alpha]]$	$\rightarrow$	$[[id2, \alpha], [id2, \alpha]], [[id2, \alpha], [id2, \alpha]]$
$[[\beta, id2], [\beta\alpha, \alpha]]$	$\rightarrow$	$[[\beta, \beta\alpha], [\beta, \alpha]], [id2, \beta\alpha], [id2, \alpha]]$
$[[id1, id1], [\alpha°\beta°, \alpha°\beta°]]$	$\rightarrow$	$[[id1, \alpha°\beta°], [id1, \alpha°\beta°]], [[id1, \alpha°\beta°], [id1, \alpha°\beta°]]$
$[[\alpha, id1], [\beta°, \alpha°\beta°]]$	$\rightarrow$	$[[\alpha, \beta°], [\alpha, \alpha°\beta°]], [[id1, \beta°], [id1, \alpha°\beta°]]$
$[[\beta\alpha, id1], [id3, \alpha°\beta°]]$	$\rightarrow$	$[[\beta\alpha, id3], [\beta\alpha, \alpha°\beta°]], [[id1, id3], [id1, \alpha°\beta°]]$

4. Stufe

$[[[\alpha°\beta°, \alpha°\beta°], [\alpha°\beta°, \beta\alpha]], [[id1, \alpha°\beta°], [id1, \beta\alpha]]]$
$[[[id3, id3], [id3, \beta\alpha]], [[id1, id3], [id1, \beta\alpha]]]$

$[[\beta°, \beta°], [\beta°, \alpha]], [[\alpha, \beta°], [\alpha, \alpha]]$
$[[\beta°, \beta°], [\beta°, \alpha]], [[\alpha, \beta°], [\alpha, \alpha]]$

$[[id3, id3], [id3, id1]], [[\beta\alpha, id3], [\beta\alpha, id1]]$
$[[\alpha°\beta°, \alpha°\beta°], [\alpha°\beta°, id1]], [[\beta\alpha, \alpha°\beta°], [\beta\alpha, id1]]$

(Im folgenden werden die Pfeilem weggelassen.)

$$\left.\begin{array}{l}[[\alpha°, \alpha°], [\alpha°, \alpha]], [[\mathrm{id}1, \alpha°], [\mathrm{id}1, \alpha]]\\ [[\mathrm{id}2, \mathrm{id}2], [\mathrm{id}2, \alpha]], [[\mathrm{id}1, \mathrm{id}2], [\mathrm{id}1, \alpha]]\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}[[\mathrm{id}2, \mathrm{id}2], [\mathrm{id}2, \alpha]], [[\alpha, \mathrm{id}2], [\alpha, \alpha]]\\ [[\mathrm{id}2, \mathrm{id}2], [\mathrm{id}2, \alpha]], [[\alpha, \mathrm{id}2], [\alpha, \alpha]]\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}[[\beta, \beta], [\beta, \alpha]], [\beta\alpha, \beta], [\beta\alpha, \alpha]]\\ [[\mathrm{id}2, \mathrm{id}2], [\mathrm{id}2, \alpha]], [[\beta\alpha, \mathrm{id}2], [\beta\alpha, \alpha]]\end{array}\right\}$$

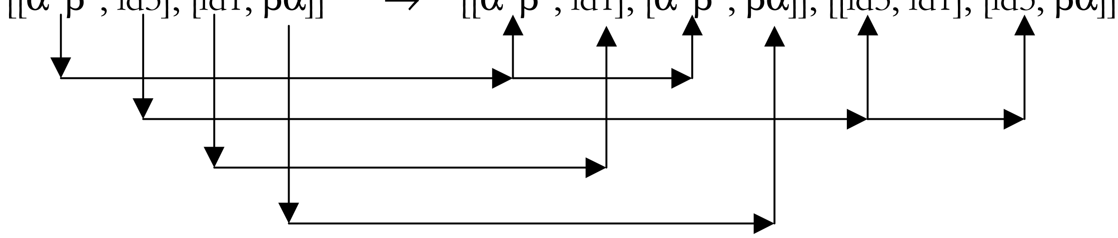
$$\left.\begin{array}{l}[[\mathrm{id}1, \mathrm{id}1], [\mathrm{id}1, \alpha°\beta°]], [[\alpha°\beta°, \mathrm{id}1], [\alpha°\beta°, \alpha°\beta°]]\\ [[\mathrm{id}1, \mathrm{id}1], [\mathrm{id}1, \alpha°\beta°]], [[\alpha°\beta°, \mathrm{id}1], [\alpha°\beta°, \alpha°\beta°]]\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}[[\alpha, \alpha], [\alpha, \alpha°\beta°]], [[\beta°, \alpha], [\beta°, \alpha°\beta°]]\\ [[\mathrm{id}1, \mathrm{id}1], [\mathrm{id}1, \alpha°\beta°]], [[\beta°, \mathrm{id}1], [\beta°, \alpha°\beta°]]\end{array}\right\}$$

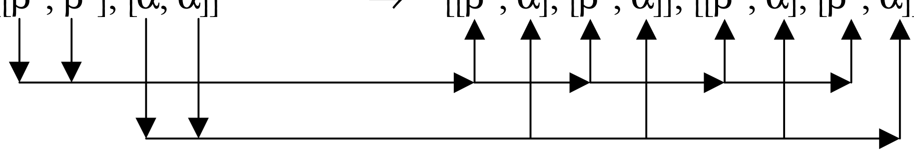
$$\left.\begin{array}{l}[[\beta\alpha, \beta\alpha], [\beta\alpha, \alpha°\beta°]], [[\mathrm{id}3, \beta\alpha], [\mathrm{id}3, \alpha°\beta°]]\\ [[\mathrm{id}1, \mathrm{id}1], [\mathrm{id}1, \alpha°\beta°]], [[\mathrm{id}3, \mathrm{id}1], [\mathrm{id}3, \alpha°\beta°]]\end{array}\right\}$$

Wenn wir nun zuerst die 1. (links) und die 3. Stufe (rechts) miteinander vergleichen:

$$[[\alpha°\beta°, \mathrm{id}3], [\mathrm{id}1, \beta\alpha]] \quad \rightarrow \quad [[\alpha°\beta°, \mathrm{id}1], [\alpha°\beta°, \beta\alpha]], [[\mathrm{id}3, \mathrm{id}1], [\mathrm{id}3, \beta\alpha]]$$



$$[[\beta°, \beta°], [\alpha, \alpha]] \quad \rightarrow \quad [[\beta°, \alpha], [\beta°, \alpha]], [[\beta°, \alpha], [\beta°, \alpha]]$$



[[id3, α°β°], [βα, id1]] → [[id3, βα], [id3, id1]], [[α°β°, βα], [α°β°, id1]]

usw. Man sieht also leicht, dass von einer Stufe zur nächsten die vier Morphismen in der Transformation links über die acht Morphismen der Transformation rechts distribuiert werden, wobei das abstrakte Schema wie folgt ausschaut:

[[A, B], [C, D]] → [[[A, C], [A, D]], [[B, C], [B, D]]]

Die relationale Verschachtelung der Kategorien, auf deren Prinzip Peirce seine Zeichenrelation eingeführt hatte, führt also bei den Arinschen Zeichenklassen zu einer eigentlichen Distributivität der Kategorien auf jeder iterierten Zeichenstufe, d.h. auf jeder Stufe n > 1. Da die geraden Stufen nach genau dem gleichen Prinzip der überkreuzten „Multiplikation" aufgebaut ist, können wir uns diesen Nachweis schenken.

Bibliographie

Arin, Ertekin, Objekt- und Raumzeichen in der Architektur. Diss. Ing. Stuttgart 1981

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Kategorielle Verschachtelung in der erweiterten Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics (erscheint, 2009)

8.8.2009